Kada periodičan kontinualni signal možemo predstaviti pomoću Fourierovog reda?

- Integral u izrazu a_k divergira, tj.$a_k \to \infty$?
- Koeficijenti a_k konačni, Fourierov red divergira (ne konvergira izvornom signalu $x(t)$)?
- Klasa signala koja se može predstaviti sa FR obuhvata signale sa konačnom energijom u toku perioda:

$$\int_T |x(t)|^2 dt < \infty$$

Ovaj uslov garantira da su svi koeficijenti Fourierovog reda konačni, odnosno da energija greške aproksimacije teži nuli kada N $\to\infty$.

$$e(t) = x(t) - \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \Rightarrow \int_T |e(t)|^2 dt = 0$$

P.L. Dirichlet

- Postavka uslova koji garantuju da je signal $x(t)$ jednak njegovoj predstavi pomoću Fourierovog reda, osim u tačkama u kojim $x(t)$ ima prekid.

- U tačkama prekida, Fourierov red konvergira srednjoj vrijednosti signala sa obe strane prekida.

- Ukupno 3 Dircihletova uslova.

1. $x(t)$ mora biti apsolutno integrabilno duž perioda T

$$\boxed{\int_T |x(t)|dt < \infty}$$

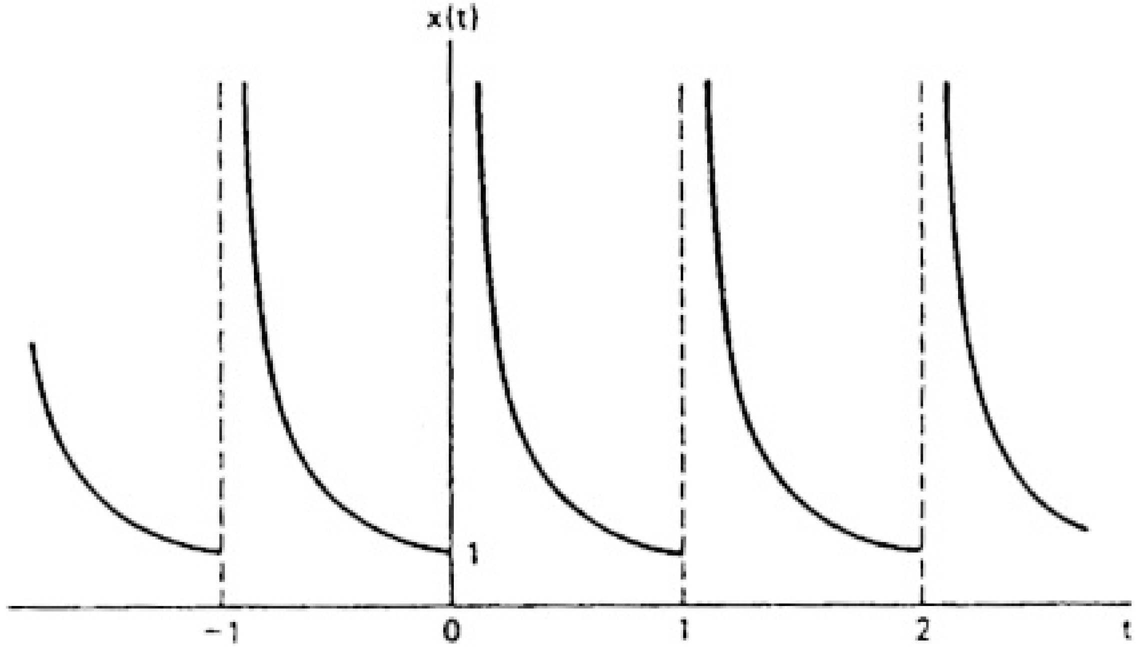
Garancija da će koeficijenti ak biti konačni:

$$|a_k| \leq \frac{1}{T}\int_T \left|x(t)e^{-jk\omega_0 t}\right|dt = \frac{1}{T}\int_T |x(t)|dt$$

$$\frac{1}{T}\int_T |x(t)|dt < \infty \Rightarrow |a_k| < \infty$$

Primer periodičnog signala koji ne zadovoljava ovaj uslov

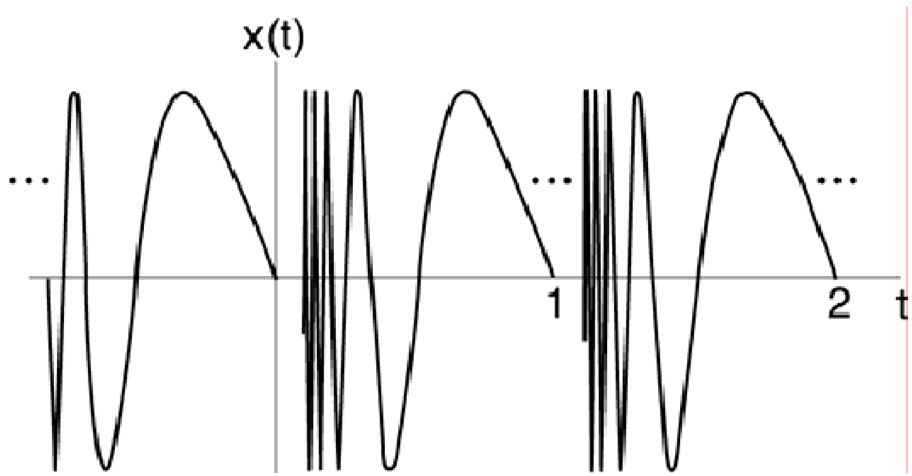
$$x(t) = \frac{1}{t}, 0 < t \leq 1. T = 1$$



2. *x(t)* ima konačan broj maksimuma i minimuma unutar jednog perioda signala

- Primer funkcije koja zadovoljava uslov 1 ali ne i uslov 2:

$$x(t) = \sin\frac{2\pi}{t}, 0 < t \leq 1, T = 1$$



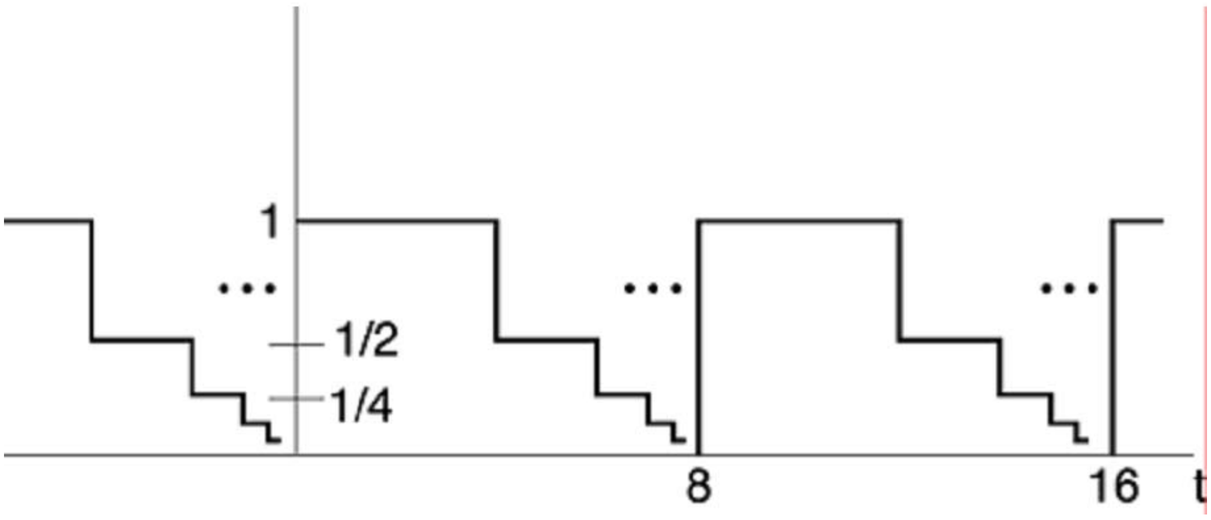
$$\int_0^1 |x(t)| dt < 1$$

ali funkcija ima beskonačno mnogo maksimuma i minimuma unutar jednog perioda

3. $x(t)$ ima konačan broj prekida u nekom konačnom intervalu. Svaki od ovih prekida je konačan.

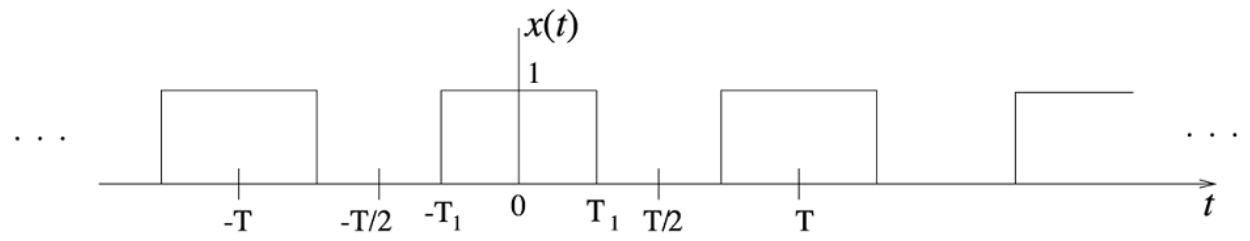
Primer funkcije koja narušava uslov 3 je prikazan na sljedećoj slici.

Signal sa periodom T=8 čini konačan broj sekcija, a svaka sekcija ima pola visine i širine u odnosu na prethodnu sekciju.



Primer: povorka pravougaonih impulsa

$$x(t)=\begin{cases}1, |t|<T_1\\ 0, T_1<|t|<T/2\end{cases}$$



$$a_0=\frac{1}{T}\int_{-T_1}^{T_1}dt=\frac{2T_1}{T}$$

Srednja vrijednost *x(t)* u periodu T!

$$a_k=\frac{1}{T}\int_{-T_1}^{T_1}e^{-jk\omega_0 t}dt=-\frac{1}{jk\omega_0 T}e^{-jk\omega_0 t}\Big|_{-T_1}^{T_1}=\frac{2}{k\omega_o T}\left[\frac{e^{jk\omega_0 T_1}-e^{-jk\omega_0 T_1}}{2j}\right]$$

$$\boxed{a_k=\frac{2\sin(k\omega_0 T_1)}{k\omega_0 T}=\frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi}, k\neq 0}$$

Primer: povorka pravougaonih impulsa

$$T = 4T_1 \longrightarrow \omega_0 T_1 = \frac{\pi}{2}$$

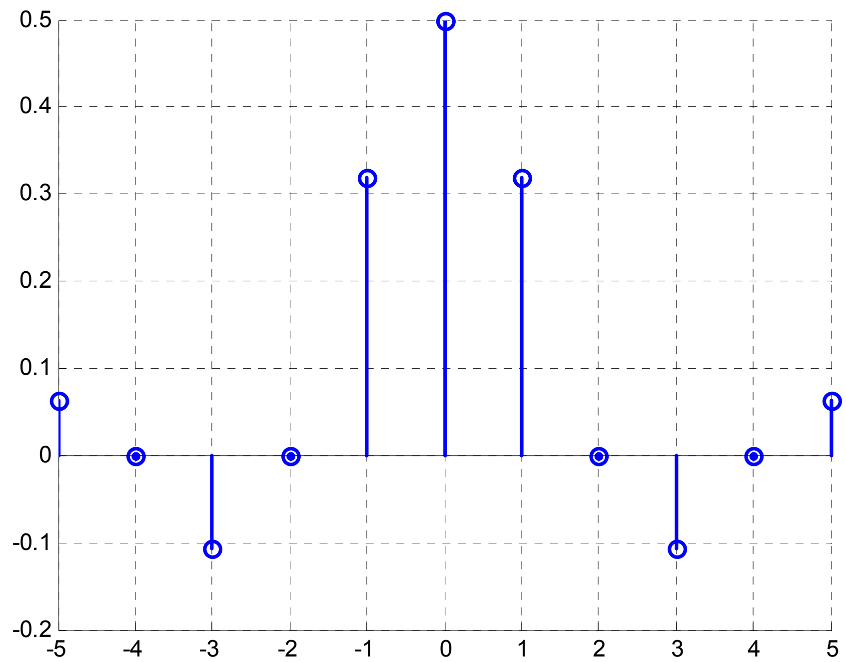
$$a_k = 0 \text{ za parno } k$$

$$a_0 = \frac{1}{2}$$

$$a_{-1} = a_1 = \frac{1}{\pi}$$

$$a_{-3} = a_3 = -\frac{1}{3\pi}$$

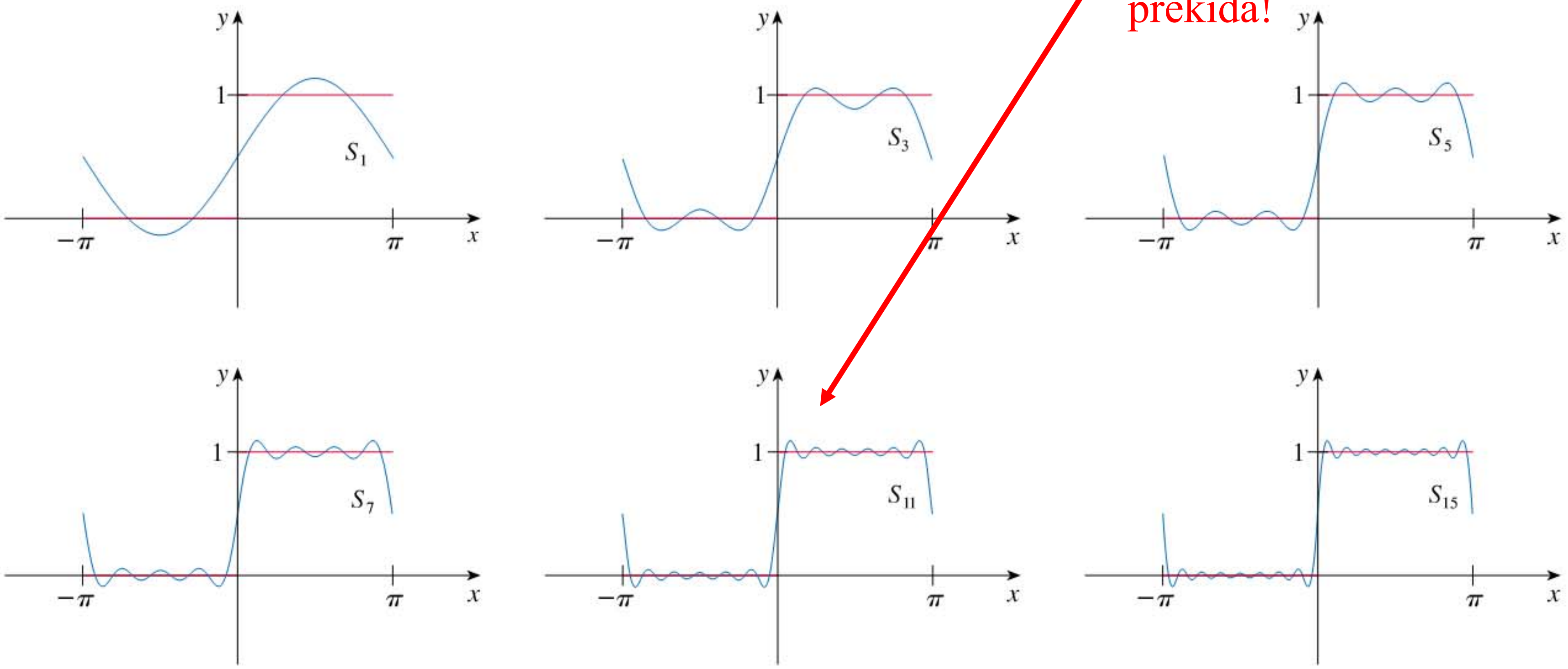
$$a_{-5} = a_5 = \frac{1}{5\pi}$$



Predstavljanje povorke impulsa sa konačnim brojem članova Fourierovog reda

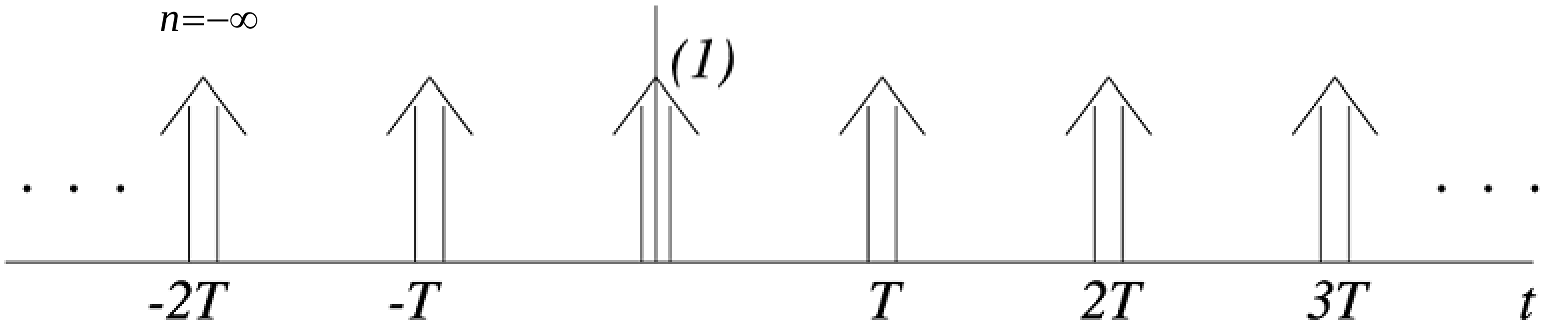
Gibbsov fenomen

Amplituda oscilacija se ne smanjuje nego se one kompresuju prema tački prekida!



Primer: povorka δ impulsa

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$



$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \delta(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

$$= \frac{1}{T} \text{ za svako } k!$$

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jk\omega_0 t}}$$

Parni i neparni signali

- Ako je periodični signal paran, tada su sinusni članovi nula

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cos k\omega_0 t$$

- a ako je neparan iznosi:

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin k\omega_0 t$$

Amplitudni i fazni spektar periodičnih signala

Amplitudni i fazni spek
periodičnog signala s
diskretni!

- Izrazimo koeficijente Fourierovog reda u obliku:

$$a_k = |a_k| e^{j\phi_k}$$

- Dijagram $|a_k|$ u zavisnosti od ugaone frekvencije ω naziva se amplitudni spektar periodičnog signala $x(t)$ a dijagram $\phi_k(\omega)$ fazni spektar.
- Za realni periodičan signal $x(t)$ je $c_{-k} = c_k^*$

$$|c_{-k}| = |c_k| \qquad \phi_{-k} = -\phi_k$$

Parna funkcija od ω

Neparna funkcija od ω

Osobine FR. *Linearnost*

- Neka su $x(t)$ i $y(t)$ dva periodična signala sa periodom T i neka imaju koeficijente Fourierovog reda a_k i b_k, respektivno:

$$x(t) \overset{FR}{\longleftrightarrow} a_k \qquad y(t) \overset{FR}{\longleftrightarrow} b_k$$

- $x(t)$ i $y(t)$ imaju jednake periode, pa i njihova linearna kombinacija ima isti period.
- c_k - koeficijenti linearne kombinacije.

$$\boxed{z(t) = x(t) + y(t) \overset{FR}{\longleftrightarrow} c_k = a_k + b_k}$$

Osobine FR. *Vremenski pomak*

- Vremenski pomak periodičnog signala *x(t)* ne utiče na njegovu periodičnost.

$$y(t) = x(t - t_0) \overset{FR}{\leftrightarrow} b_k$$

$$b_k = \frac{1}{T} \int_T x(t - t_0) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

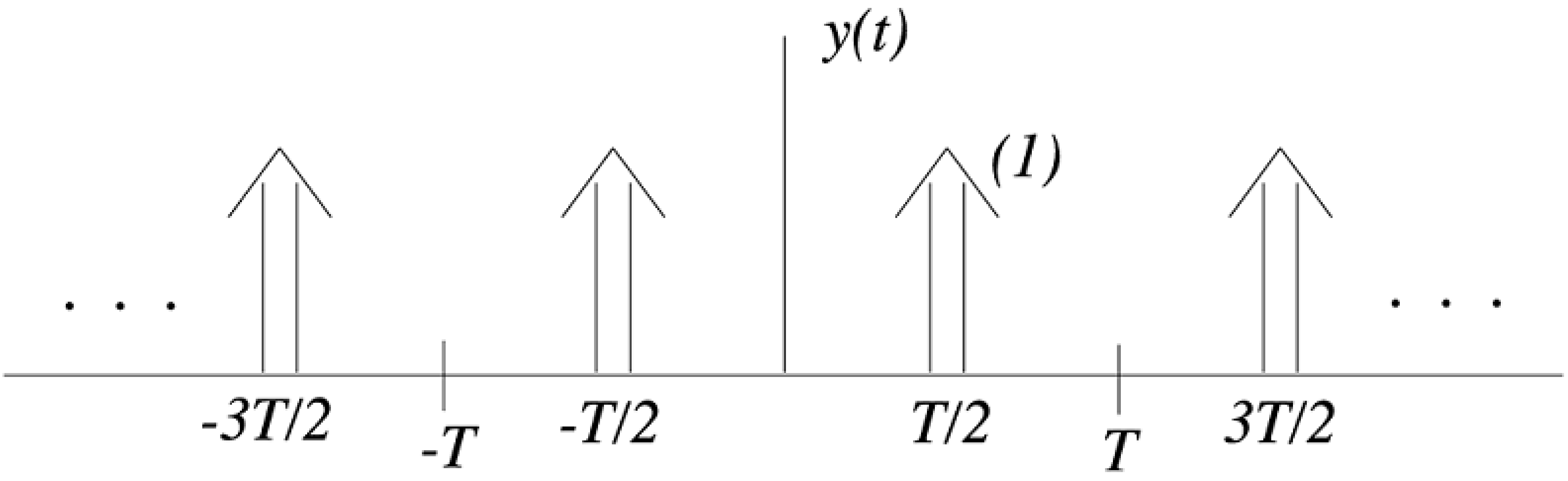
$$\tau = t - t_0 \Rightarrow b_k = \frac{1}{T} \int_T x(\tau) e^{-jk\omega_0 (\tau + t_0)} d\tau = e^{-jk\omega_0 t_0} \frac{1}{T} \int_T x(\tau) e^{-jk\omega_0 \tau} d\tau$$

$$= e^{-jk\omega_0 t_0} a_k = e^{-jk\frac{2\pi}{T} t_0} a_k$$

$$x(t - t_0) \overset{FR}{\leftrightarrow} e^{-jk\omega_0 t_0} a_k$$

Primer. *Pomeranje za T/2*

$$y(t) = x(t - T/2) \Rightarrow a_k e^{-jk\omega_0 T/2} = a_k e^{-jk\pi} = (-1)^k a_k$$



$$y(t) \overset{FR}{\leftrightarrow} \frac{(-1)^k}{T}$$

Osobine FR. *Obrat vremena*

- Period T periodičnog signala $x(t)$ ostaje nepromenjen i u slučaju obraćanja vremena (-t).

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{-jk2\pi t/T}$$

$$k = -m \Longrightarrow y(t) = x(-t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_{-m} e^{jm2\pi t/T} \Longrightarrow b_k = a_{-k}$$

$$\boxed{x(-t) \overset{FR}{\leftrightarrow} a_{-k}}$$

Osobine FR. *Vremesnko skaliranje*

- α=> realni skalar

$$x(\alpha t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk2(\alpha\omega_0)t}$$

Vidimo da se koeficijenti Fourierovog reda ne menjaju dok se menja predstava pomoću Fourierovog reda jer se menja osnovna frekvencija.

Signal $x(\alpha t)$ periodičan sa periodom T/α.

Množenje

- Neka su $x(t)$ i $y(t)$ dva periodična signala sa periodom T i neka imaju koeficijente Fourierovog reda a_k i b_k, respektivno:

$$x(t) \overset{FR}{\leftrightarrow} a_k \qquad y(t) \overset{FR}{\leftrightarrow} b_k$$

- Proizvod $x(t)y(t)$ je takođe periodičan sa periodom T i možemo ga predstaviti pomoću Fourierovog reda sa koeficijentima h_k.

$$x(t)y(t) \overset{FR}{\leftrightarrow} h_k = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l b_{k-l}$$

Zaista, neka je $z(t)=x(t)y(t)$:

$$z(t+T)=x(t+T)y(t+T)=x(t)y(t)=z(t)$$

$$z(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$h_k=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} z(t)e^{-jk\omega_0 t}dt=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)y(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

$$=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m e^{jm\omega_0 t}\right)y(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m\left[\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} y(t)e^{-j(k-m)\omega_0 t}dt\right]=\sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m b_{k-m}$$

Parsevalov teorem za kontinualne periodične signale

- Snaga signala u toku jednog perioda je:

$$P = \frac{1}{T} \int_{T_0} \left| x(t) \right|^2 dt$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$x^*(t) = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \right)^* = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^* e^{-jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{-k}^* e^{jk\omega_0 t}$$

Iz gornje relacije vidimo da ako su a_k koeficijenti Fourierovog reda signala $x(t)$, tada su a_{-k}* koeficijenti Fourierovog reda signala $x^*(t)$.

Parsevalov teorem za kontinualne periodične signale

- Koeficijenti Fourierovog reda proizvoda dva signala su jednaki:

$$h_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)y(t)e^{-jk\omega_0 t}dt = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m b_{k-m}$$

$$k = 0 \Rightarrow \frac{1}{T}\int_T x(t)y(t)dt = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m b_{-m}$$

$$b_m = a_{-m}^* \Rightarrow b_{-m} = a_m^*$$

$$\boxed{\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)x^*(t)dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k a_k^* = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2}$$

PARSEVALOV TEOREM ZA KONTINUALNE PERIODIČNE SIGNALE

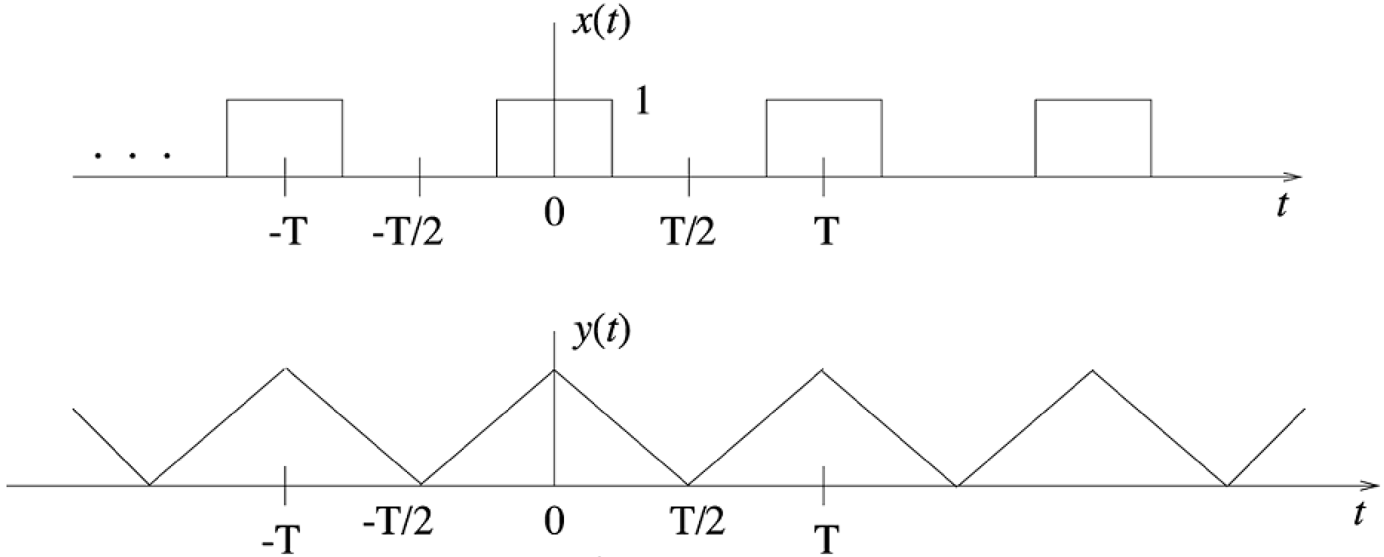
Parsevalov teorem za kontinualne periodične signale

Parsevalov teorem govori da je (ukupna) srednja snaga periodičnog signala jednaka sumi srednjih snaga svih njegovih harmonijskih komponenti.

$$\frac{1}{T}\int_T \left|a_k e^{jk\omega_0 t}\right|^2 dt = \frac{1}{T}\int_T \left|a_k\right|^2 dt = \left|a_k\right|^2$$

Srednja snaga *k*-te harmonijske komponente

Periodična konvolucija



$$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) y(t-\tau) d\tau$$

x(t) i *y(t)* pozitivni periodični signali:

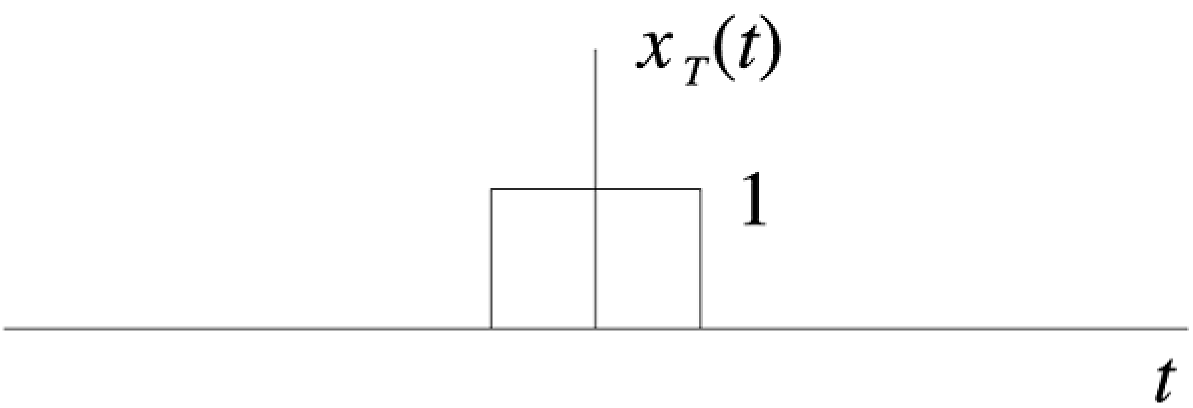
$$x(t) * y(t) = \infty$$

Periodična konvolucija

Ako integralimo duž jednog perioda:

$$x(t) * y(t) = \int_{-T/2}^{T/2} x(\tau) y(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x_T(\tau) y(t-\tau) d\tau$$

$$x_T(t) = \begin{cases} x(t), -T/2 < t < T/2 \\ 0, \text{za ostalo } t \end{cases}$$



Periodična konvolucija

$$c_k = \frac{1}{T}\int_T z(t)e^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{1}{T}\int_T \left(\int_T x(\tau)y(t-\tau)d\tau \right) e^{-jk\omega_0 t}dt$$

$$= \int_T \left(\frac{1}{T}\int_T y(t-\tau)e^{-jk\omega_0 (t-\tau)}dt \right) x(\tau)e^{-jk\omega_0 \tau}d\tau$$

$$= \int_T b_k x(\tau)e^{-jk\omega_0 \tau}d\tau = Ta_k b_k$$

Množenje u frekventnom domenu!

Fourierovi redovi i LTI sistemi

- LTI sistem je okarakterisan svojim imulsnim odzivom $h(t)$, odnosno prenosnom funkcijom:

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau$$

- Kada je s opšti kompleksan broj, tada je $H(s)$ prenosna funkcija sistema.

$$s = j\omega \Rightarrow \mathrm{Re}\{s\} = 0 \quad \Longrightarrow \quad e^{st} \Rightarrow e^{j\omega t}$$

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt$$

Frekventni odziv sistema

Fourierovi redovi i LTI sistemi

- Ako je $x(t)$ periodičan kontinualni signal predstavljen pomoću Fourierovog reda:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

- i ako je poznat frekventni odziv $H(j\omega)$:

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k H(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t}$$

$y(t)$ je periodična funkcija sa istim periodom T, odnosno osnovnom frekvencijom ω_0.

$\{a_k H(jk\omega_0)\}$ je skup koeficijenata Fourierovog reda odziva sistema $y(t)$.