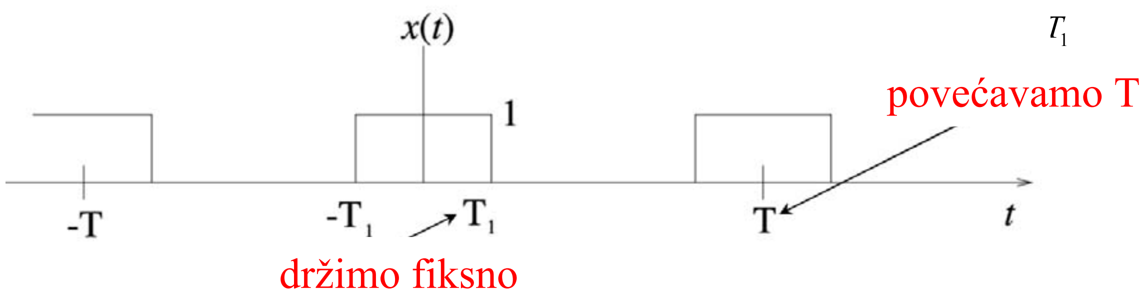
Uvod

- Fourierov red – predstavljanje periodičnih signala kao beskonačne sume harmonijskih funkcija.
- $x(t)$ – neki aperiodičan signal koji se može posmatrati kao periodičan signal sa peridom $T \rightarrow \infty$.
- U slučaju aperiodičnih signala, amplitudni i fazni spektar su diskretni jer harmonijske komponente primaju samo učestanosti koje su celobrojni multipl osnovne učestanosti $\omega_0 = 2\pi/T$. $T \rightarrow \infty \Rightarrow \omega_0 \rightarrow 0$
- Fourierova transformacija – proširenje koncepta na aperiodične signale.

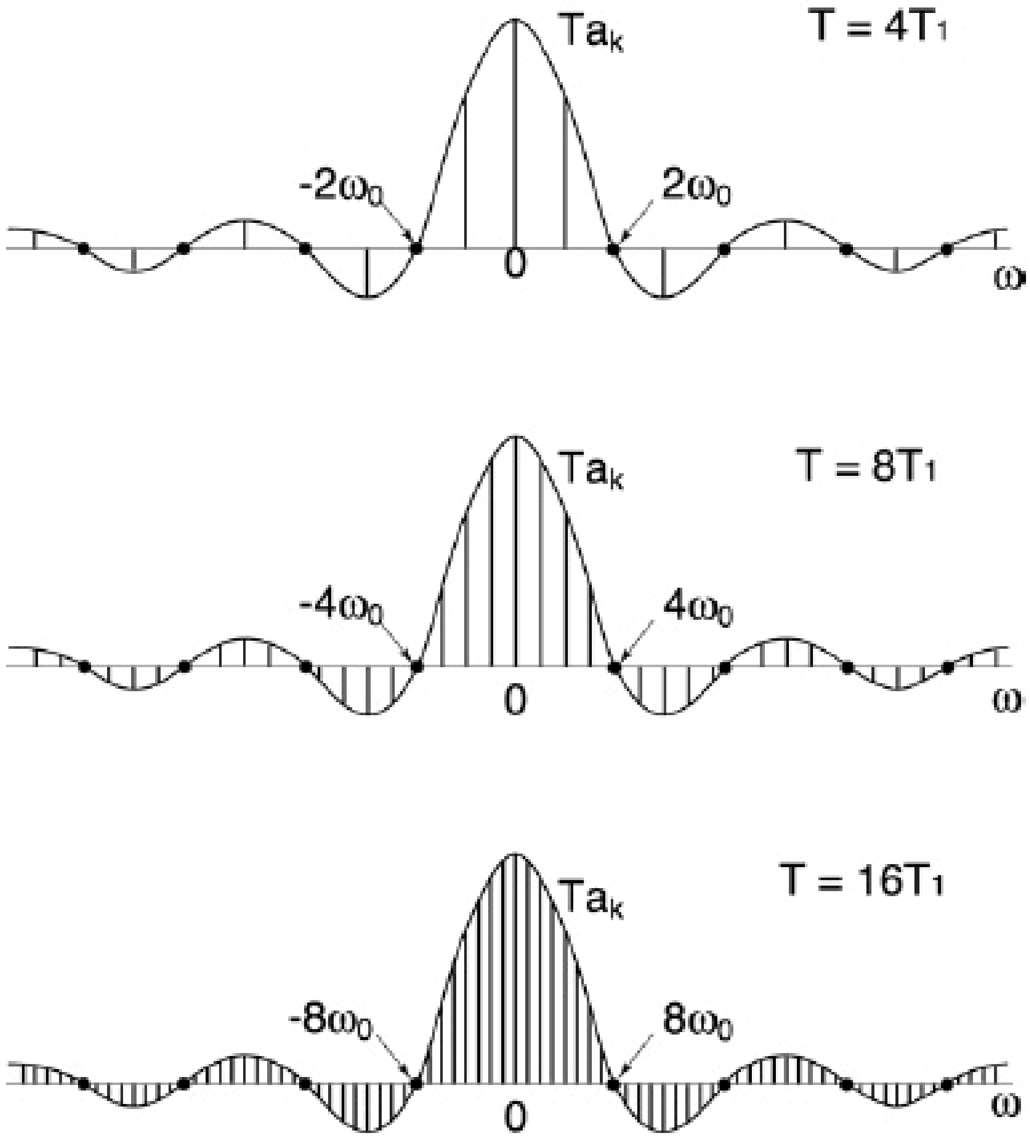
Predstavljanje aperiodičnih signala

- Posmatraćemo povorku pravougaonih impulsa.



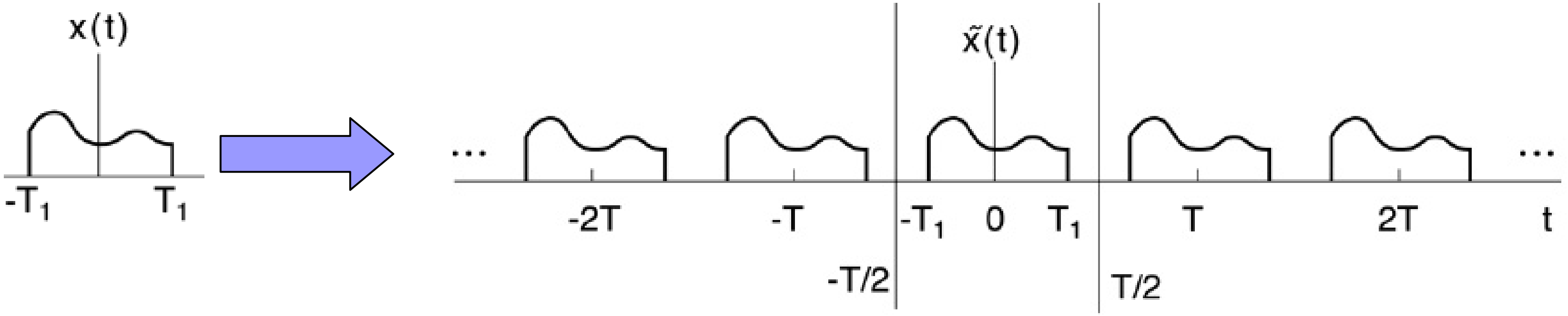
$$a_k = \frac{2\sin(k\omega_0 T_1)}{k\omega_0 T} \quad \Longrightarrow \quad Ta_k = \frac{2\sin(k\omega T_1)}{\omega}\bigg|_{\omega = k\omega_0}$$

Ako ω posmatramo kao kontinualnu promjenljivu, funkcija $(2\sin\omega T_1)/\omega$ predstavlja anvelopu Ta_k dok su koeficijenti ak uzorci ove anvelope u jednakim intervalima.



- Sa povećanjem perioda *T*, anvelopa se uzorkuje sa kraćim intervalima između uzoraka.
- Istovremeno, koeficijenti Fourierovog reda pomnoženi sa *T* postaju sve bliži i bliži.
- Aperiodični signal možemo posmatrati kao limes periodičnog signala kada $T \to \infty$.

- Posmatramo signal $x(t)$ konačnog trajanja (interval od $-T_1$ do T_1).
- Iz aperiodičnog signala konačnog trajanja formiramo periodični signal $\tilde{x}(t)$.



$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \tilde{x}(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

Na intervalu od $-T/2$ do $T/2$ je $\tilde{x}(t) = x(t)$

- Definisemo anvelopu $X(j\omega)$ od Ta_k:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad \Rightarrow \quad a_k = \frac{1}{T} X(j\omega)$$

- Zamenimo a_k u Fourierov red:

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} X(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t}$$

$$\Big\downarrow \; T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

$$\tilde{x}(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \omega_0$$

$$T \to \infty \Rightarrow \tilde{x} \to x(t), \quad \omega_0 \to 0$$

Par Fourierove transformacije

Prikaz aperiodičnog signala kao linearnu kombinaciju kompl. eksp. signala kojima odgovara kontinum frekvencija i amplituda X(jω)/(dω/π)

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

Spektar aperiodičnog signala x(t)

Konvergencija Fourierovog integrala

1. Kada $x(t)$ ima konačnu energiju, tada se može garantovati da je $X(j\omega)$ konačno (energija greške jednaka je nuli).

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty$$

2. Dirichletovi uslovi

Dirichletovi uslovi

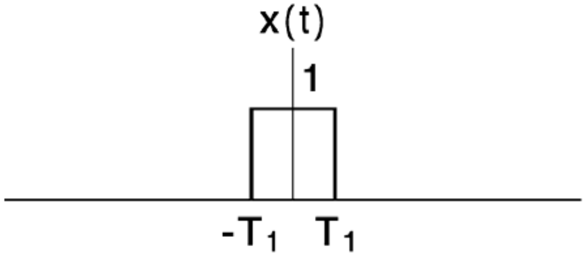
1. *x(t)* je apsolutno integrabilna funkcija.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$$

2. *x(t)* ima konačan broj maksimuma i minimuma unutar konačnog intervala.
3. *x(t)* ima konačan broj prekida unutar bilo kojeg konačnog intervala. Osim toga, svaki od ovih prekida mora biti konačan.

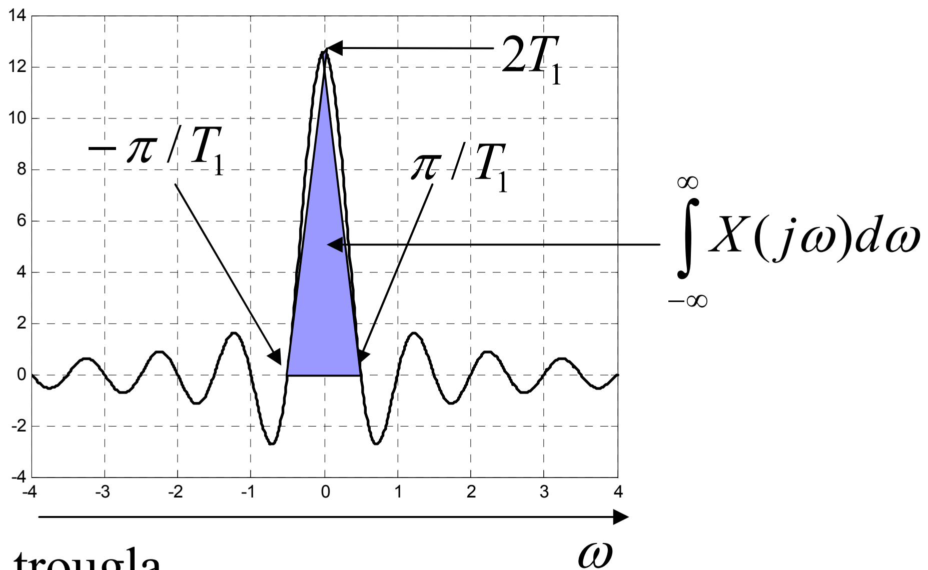
Primer

- Pravougaoni impuls



$$X(j\omega)=\int_{-T_1}^{T_1} e^{-j\omega t}dt=\frac{2\sin\omega T_1}{\omega}$$

$$X(0)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)dt=2T_1$$



$$x(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)d\omega=\frac{1}{2\pi}\cdot\text{površina trougla}$$

Delta impuls

$$x(t) = \delta(t) \Rightarrow X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = 1$$

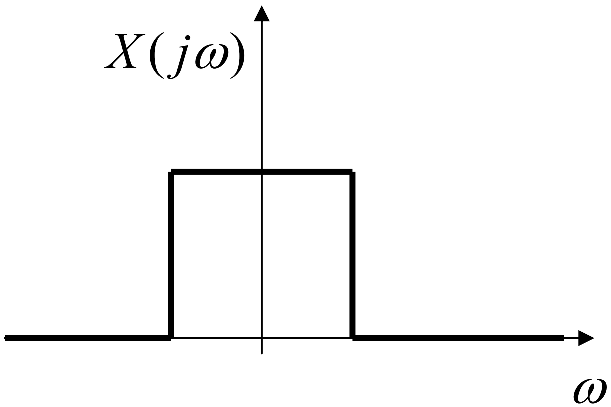
$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega$$

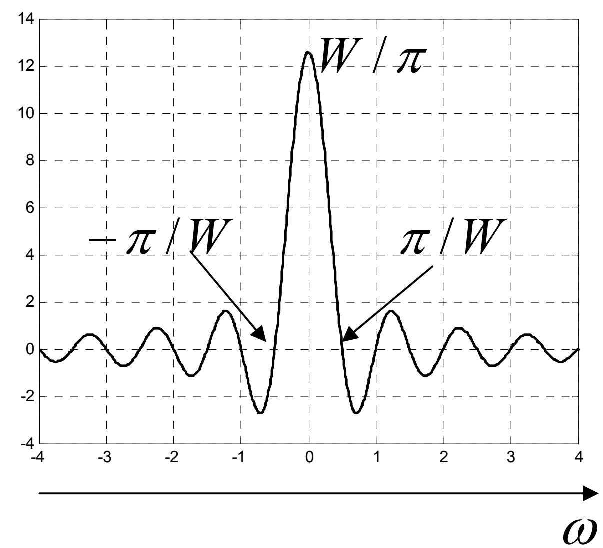
$$x(t) = \delta(t - t_0)$$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega t_0}$$

Primer

$$X(j\omega)=\begin{cases}1, & |\omega|<W\\ 0, & |\omega|>W\end{cases}$$





$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-W}^{W}e^{j\omega t}d\omega=\frac{\sin Wt}{\pi t}$$

Svojstvo dualnosti

Primer. Guasov proces (verovatnoća)

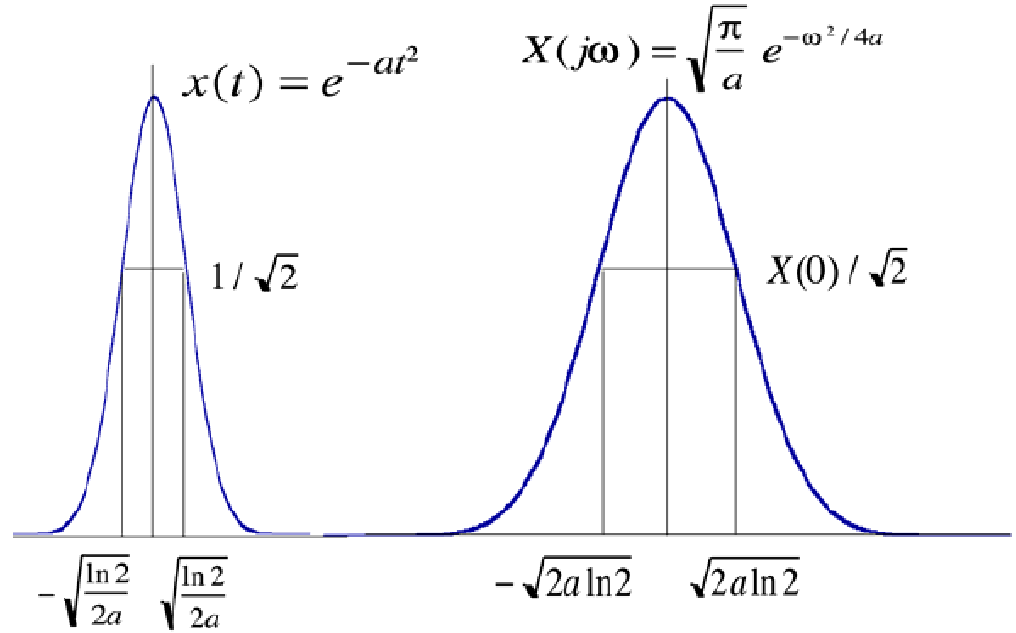
$$x(t) = e^{-at^2}$$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} e^{-j\omega t} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\left[t^2 + j\frac{\omega}{a}t + \left(\frac{j\omega}{2a}\right)^2\right] + a\left(\frac{j\omega}{2a}\right)^2} dt$$

$$= \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\left(t + \frac{j\omega}{2a}\right)^2}\right] e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$$



$$\Delta t \cdot \Delta\omega \sim \left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)\sqrt{a} = 1$$

Princip neodređenosti!

Ne možemo istovremeno osigurati da i Δt i Δω budu proizvoljno mali!

Fourierova transformacija periodičnih signala

- Da bi razmatrali periodične i aperiodične signale u istom kontekstu.
- FT izvodimo direktno iz predstave periodičnog signala pomoću FR.
- Transformaciju čini povorka impulsa u frekventnom domenu, sa površinom impulsa proporcionalnom koeficijentima reda.
- Posmatramo signal čija je Fourierova transformacija oblika $X(j\omega)=2\pi\delta(\omega-\omega_0)$...

Fourierova transformacija periodičnih signala

- Signal $x(t)$ odredićemo pomoću inverzne Fourierove transformacije:

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}2\pi\delta(\omega-\omega_0)e^{j\omega t}d\omega=e^{j\omega_0 t}$$

- Generalizujemo prethodni izraz tako što će $X(j\omega)$ biti linearna kombinacija ekvidistantnih impulsa

$$X(j\omega)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}2\pi a_k\delta(\omega-k\omega_0)$$

- kome odgovara signal oblika:

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k e^{jk\omega_0 t}$$

Predstava periodičnog signala pomoću

Fourierovog reda!

Fourierova transformacija periodičnih signala

- FT periodičnog signala koji ima koeficijente Fourierovog reda $\{a_k\}$ se prikazuje kao povorka impulsa u tačkama $\omega = k\omega_0$.

- Površina impulsa koji odgovara k-tom harmoniku frekvencije $k\omega_0$ je jednaka 2π puta k-ti koeficijent Fourierovog reda a_k.

Primer

- Analiziramo jediničnu povorku pravougaonih impulsa sa periodom T i trajanjem $2T_1$. Koeficijenti razvoja ovog signala u Fourierov red su:

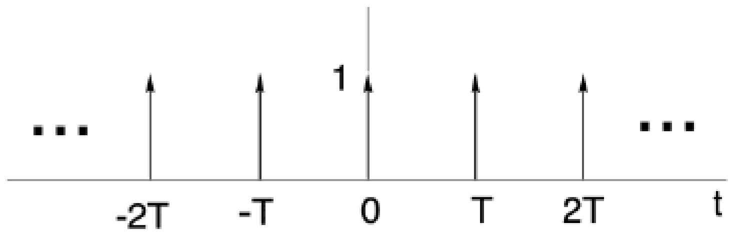
$$a_k = \frac{\sin k\omega_0 T_1}{\pi k}$$

- pa je i Fourierova transformacija ovog signala:

$$X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\sin k\omega_0 T_1}{k} \delta(\omega - k\omega_0)$$

Primer. Povorka δ impulsa

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$$

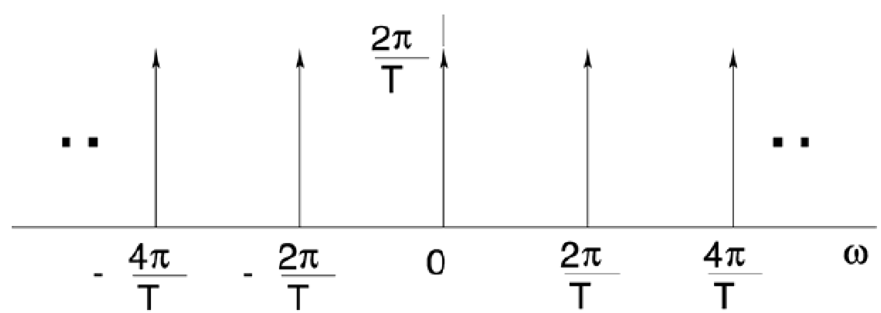


$$x(t)\leftrightarrow a_k=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt=\frac{1}{T}$$

T⇒period u vremenskom domenu

2π/T⇒period u vremenskom domenu

$$X(j\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{2\pi}{T}\delta\left(\omega-\frac{2\pi k}{T}\right)$$



Isti oblik funkcije i u vremenskom i u frekventnom domenu!

Osobine Fourierove transformacije

- Linearnost
- Vremenski pomak
- Konjugovanje
- Diferenciranje i integracija
- Skaliranje vremena i frekvencije

Linearnost

$$x(t) \overset{F}{\leftrightarrow} X(j\omega) \quad y(t) \overset{F}{\leftrightarrow} Y(j\omega)$$

$$\Downarrow$$

$$ax(t) + by(t) \overset{F}{\leftrightarrow} aX(j\omega) + bY(j\omega)$$

Vremenski pomak

$$x(t) \overset{F}{\leftrightarrow} X(j\omega)$$

$$x(t-t_0) \overset{F}{\leftrightarrow} e^{-j\omega t_0} X(j\omega)$$

Samo dodatni fazni pomak za -ωt_0!

Zaista,

$$x(t-t_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega(t-t_0)} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t_0} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$= e^{-j\omega t_0} X(j\omega)$$

Konjugovanje

$$x(t) \overset{F}{\leftrightarrow} X(j\omega)$$

$$\Downarrow$$

$$x^*(t) \overset{F}{\leftrightarrow} X^*(-j\omega)$$

Zaista,

$$X^*(j\omega) = \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \right]^* = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) e^{j\omega t} dt$$

$$X^*(-j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$X^*(-j\omega) = X(j\omega) \Rightarrow$$ Za realan signal!

Diferenciranje i integracija

- Neka je $x(t)$ signal čija je Fourierova transformacija $X(j\omega)$.
- Ako diferenciramo izraz za $x(t)$ po t:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} j\omega X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

- Očigledno je:

$$\frac{dx(t)}{dt} \overset{F}{\leftrightarrow} j\omega X(j\omega)$$

- Diferenciranje u vremenskom domenu odgovara množenju sa $j\omega$ u frekventnom domenu.
- Integracija je inverzna operacija te integracija po vremenu odgovara množenju sa $1/j\omega$ u frekventnom domenu.
- Uzimajući u obzir i DC komponentu na izlazu integratora:

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \leftrightarrow \frac{1}{j\omega}X(j\omega) + \pi X(0)\delta(\omega)$$

Primer

- Odrediti Fourierovu transformaciju Heavisideove funkcije.

$$g(t)=\delta(t)\Rightarrow G(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)e^{-j\omega t}dt=1$$

$$x(t)=u(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau \quad\Longrightarrow\quad X(j\omega)=\frac{G(j\omega)}{j\omega}+\pi G(0)\delta(\omega)$$

$$G(j\omega)=1 \quad\Longrightarrow\quad X(j\omega)=\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)$$

U drugom smjeru...

$$\delta(t)=\frac{du(t)}{dt}\overset{F}{\leftrightarrow} j\omega\left[\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)\right]=1 \quad \text{jer je} \quad \omega\cdot\delta(\omega)=0$$

Skaliranje vremena i frekvencije

$$x(t) \overset{F}{\leftrightarrow} X(j\omega)$$

$$x(at) \overset{F}{\leftrightarrow} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{j\omega}{a}\right)$$

Zaista,

$$\mathscr{F}\{x(at)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(at) e^{-j\omega t} dt$$

$$\tau = at \qquad \mathscr{F}\{x(at)\} = \begin{cases} \dfrac{1}{a} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\frac{\omega}{a}\tau} d\tau, a > 0 \\ -\dfrac{1}{a} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\frac{\omega}{a}\tau} d\tau, a < 0 \end{cases}$$

Parsevalov teorem

$$x(t) \overset{F}{\leftrightarrow} X(j\omega)$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega}$$

Zaista,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) x^*(t) dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X^*(j\omega) e^{-j\omega t} d\omega \right] dt$$

- Promenom redosleda integracije dobivamo:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X^*(j\omega) \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \right] d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X^*(j\omega) X(j\omega) d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$$

Parsevalov teorem govori da se ukupna energija signala može odrediti ili integriranjem energije po jedinici vremena $|x(t)|^2$ duž cijele vremenske ose ili integriranjem energije po jedinici frekvencije $|X(j\omega)|^2/2\pi$ za sve frekvencije.

Dualnost

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

RAZLIKE!

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$$

Pretpostavićemo da su *f(·)* i *g(·)* dve funkcije povezane relacijom:

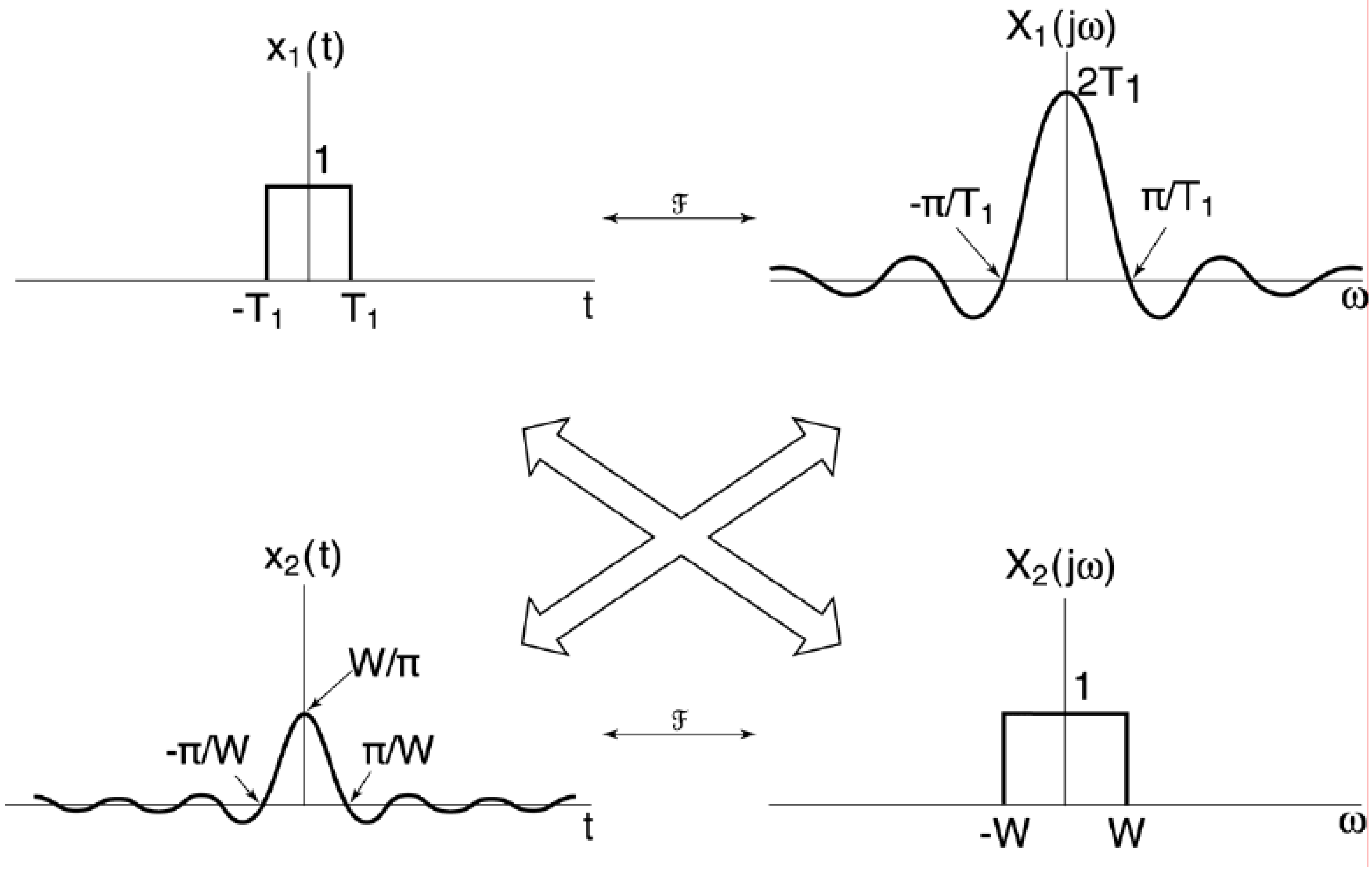
$$f(r) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)e^{-jr\tau}d\tau$$

Tada je:

Za $\tau = t$ *i* $r = \omega$: $$x_1(t) = g(t) \leftrightarrow X_1(j\omega) = f(\omega)$$

Za $\tau = -\omega$ *i* $r = t$: $$x_2(t) = f(t) \leftrightarrow X_2(j\omega) = 2\pi g(-\omega)$$

Dualnost



Konvolucija

- Odziv LTI sistema na ulaz $x(t)$ je određen konvolucionim integralom:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

- Fourierova transformacija $Y(j\omega)$ signala $y(t)$:

$$Y(j\omega) = \mathscr{F}\{y(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau\right]e^{-j\omega t}dt$$

- Promjenom redosleda integracije:

$$Y(j\omega) = \mathscr{F}\{y(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \underbrace{\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) e^{-j\omega t} dt \right]}_{e^{-j\omega\tau} H(j\omega)} d\tau$$

$$Y(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\omega\tau} H(j\omega) d\tau = H(j\omega) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau}_{X(j\omega)}$$

$$Y(j\omega) = H(j\omega) X(j\omega)$$

Fourierova transfromacija preslikava konvoluciju dva signala u proizvod njihovih Fourierovih transformacija.

Množenje

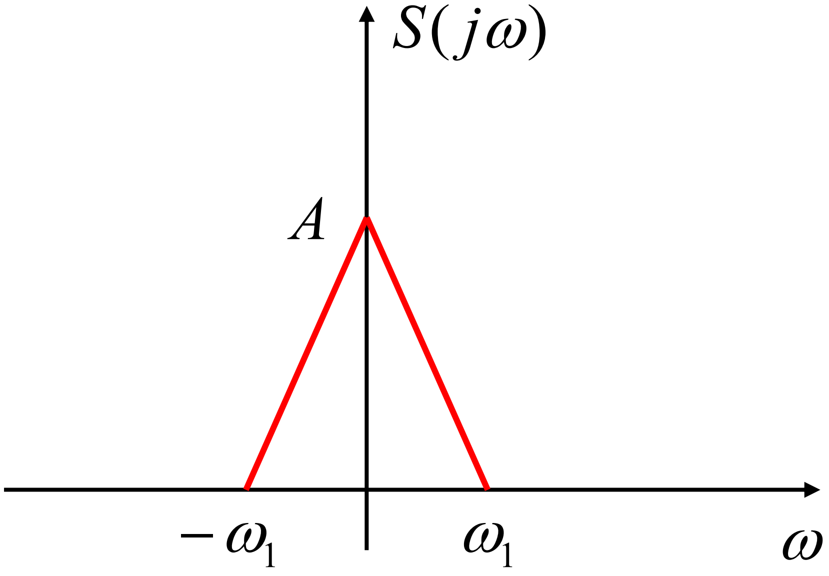
- Svojstvo konvolucije govori da konvolucija u vremenskom domenu odgovara množenju u frekventnom domenu.
- Usled dualnosti između vremenskog i frekventnog domena, množenje u vremenskom domenu odgovara konvoluciji u frekventnom domenu.

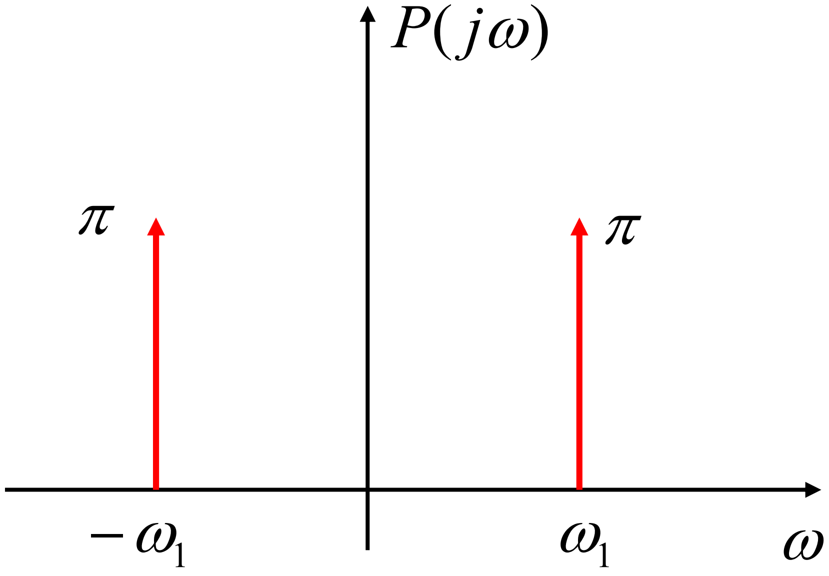
$$r(t) = s(t)p(t) \overset{F}{\leftrightarrow} R(j\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(j\theta)P(j(\omega-\theta))d\theta$$

Primer

- Neka je $s(t)$ signal čiji je spektar $S(j\omega)$. Ako je $p(t)=\cos\omega_0 t$, odrediti spektar signal $r(t)=s(t)p(t)$.

$$P(j\omega)=\pi\delta(\omega-\omega_0)+\pi\delta(\omega+\omega_0)$$





- Spektar signala *R(jω)* je:

$$R(j\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S(j\theta)P(j(\omega-\theta))d\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi}\pi\int_{-\infty}^{\infty}S(j\theta)\big(\delta(\omega-\omega_0-\theta)+\delta(\omega+\omega_0+\theta)\big)d\theta$$

$$=\frac{1}{2}S\big(j(\omega-\omega_0)\big)+\frac{1}{2}S\big(j(\omega+\omega_0)\big)$$