

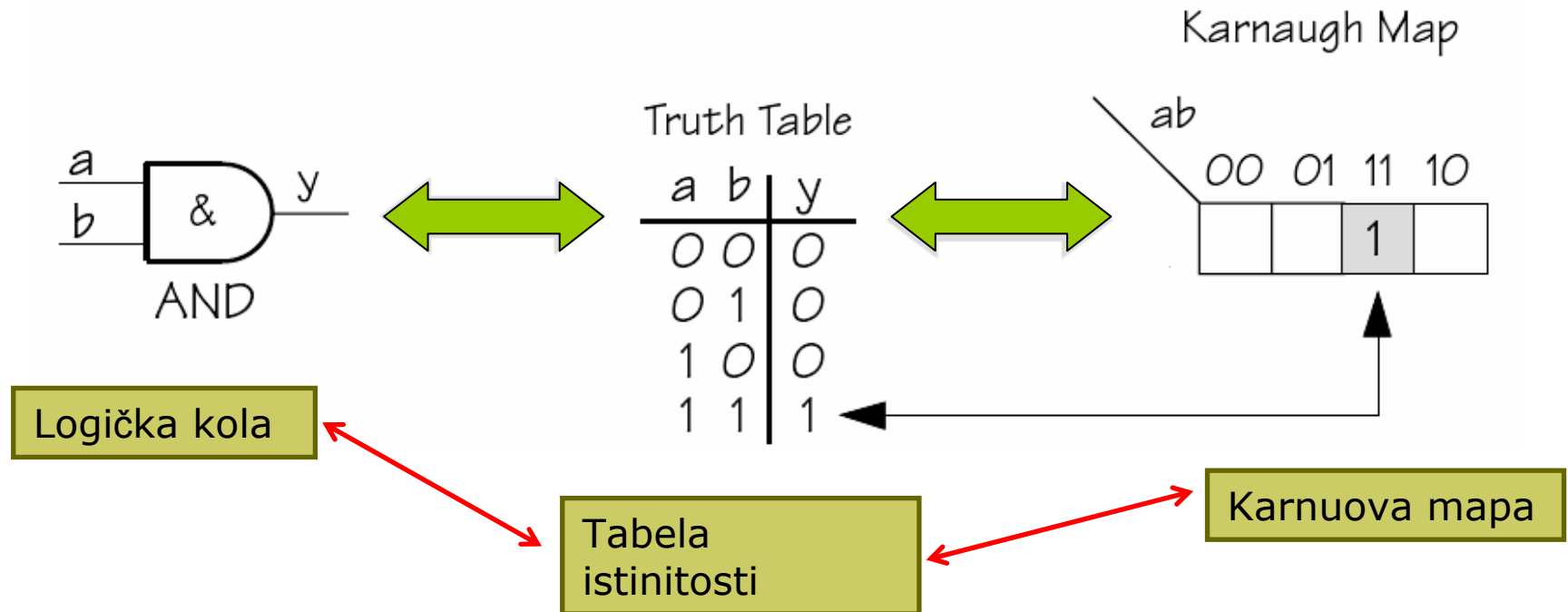
VTŠ: Osnovi računarske tehnike

Karnuove (Karnaugh) Mape

Mr Veličković Zoran
Mart, 2010.

Karnaugh (Karnuove) Mape

- ❑ Maurice Karnaugh je 1953 je objavio svoj rad.
- ❑ **Karnuove mape** obezbeđuju alternativnu tehniku za predstavu Bulovih funkcija.
- ❑ Primer Karnuove mape za 2-ulaznu I funkciju:

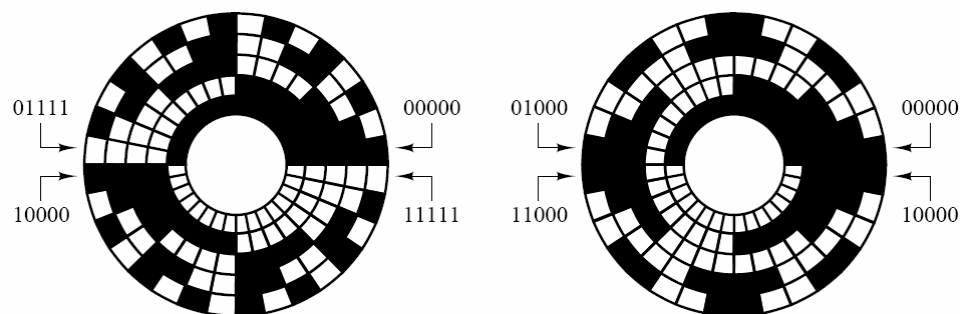


Grejev kod i Karnuove mape

- ❑ Karnuove mape sadrže kvadrat (box) za svaku liniju iz **tabele istinitosti**. Binarne vrednosti iznad ovih boksova su pridružene ulazima **a** i **b**.
- ❑ Kod Karnuove mape susedne kolone se mogu razlikovati samo u **jednom bitu**: na primer 00_2 , $0\mathbf{1}_2$, $\mathbf{1}\mathbf{1}_2$, i $\mathbf{1}0_2$.
- ❑ Ovaj redosled je poznat pod nazivom *Grejev (Gray) kod (code)* i on je ključan faktor za realizaciju mapa.
- ❑ Kolona **y** u tabeli istinitosti prikazuje sve 0 i 1 koje odgovaraju ulaznim promenljivama. U Karnuove mape takođe treba uneti sve izlazne vrednosti.
- ❑ Zbog jasnoće unosi se samo jedna logika vrednost, uobičajeno su to jedinice (**1**).

Primena Grejevog kode

Decimal		Binary	Decimal		Gray code
15		1111	15		1000
14		1110	14		1001
13		1101	13		1011
12		1100	12		1010
11		1011	11		1110
10		1010	10		1111
9		1001	9		1101
8		1000	8		1100
7		0111	7		0100
6		0110	6		0101
5		0101	5		0111
4		0100	4		0110
3		0011	3		0010
2		0010	2		0011
1		0001	1		0001
0		0000	0		0000

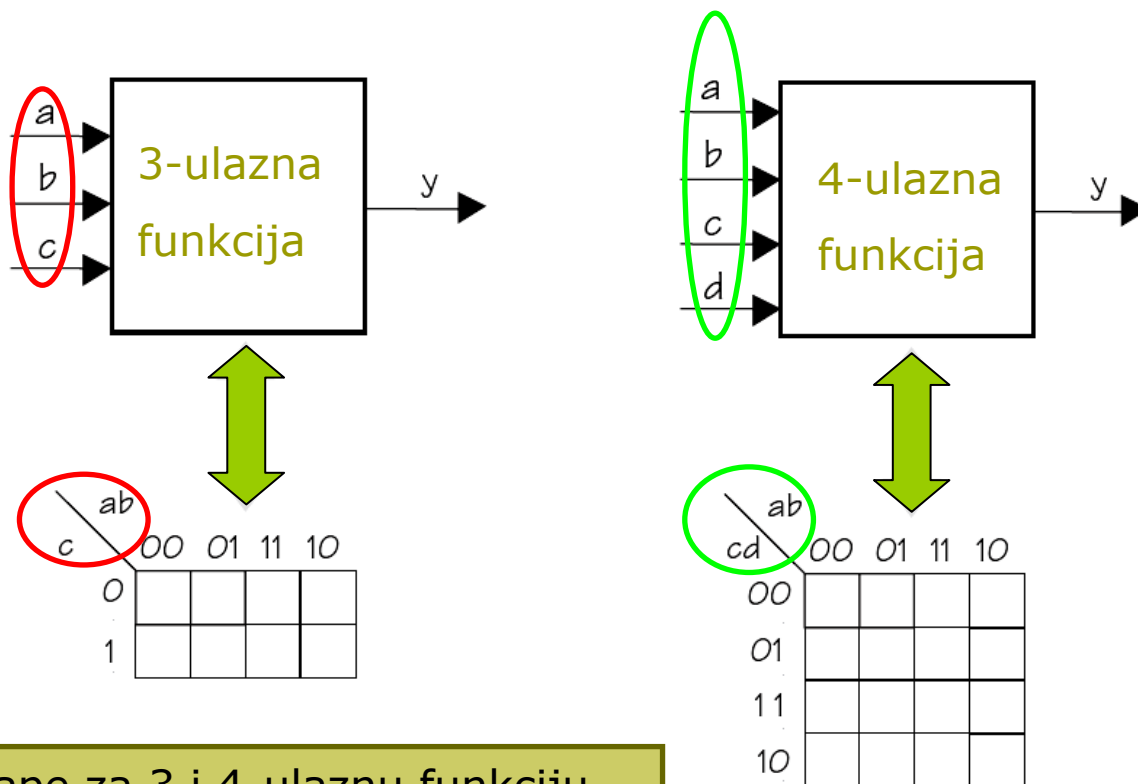


Upotreba Grejevog koda kod ugaonih kodera

Upotreba Grejevog i binarnog koda kod linearnih kodera

3-ulazne i 4-ulazne funkcije

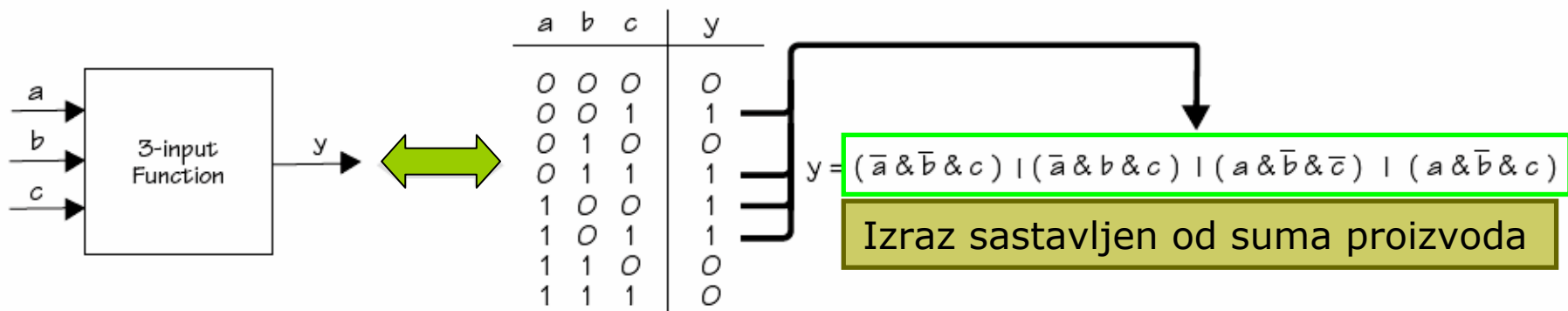
- ❑ Slične mape se mogu formirati za **3-ulazne** i **4-ulazne** funkcije.
- ❑ U slučaju 4-ulazne mape (matrice), veličine pridružene ulazu *c* i *d* moraju takođe biti uređene Gray kodom. Susedne kolone se mogu razlikovati samo u jednom bitu.



Karnuove mape za 3 i 4-ulaznu funkciju

Minimiziranje Karnuovim mapama

- ❑ Karnuove mape se koriste za **uprošćavanje i minimizaciju** Bulovih funkcija.
- ❑ Jednačine se izvode iz tablice istinitosti, tako što se formiraju **mintermi**, po jedan za svaku izlaznu jedinicu.
- ❑ Algebarsko uprošćavanje se kasnije može primeniti na ove jednačine što je vremenski često zahtevan posao.



Minimiziranje Karnuovim mapama

- Jedinice mapirane u **boksovima** predstavljaju iste minterme kao što su jedinice u tablici istinitosti.
- Međutim, kako se ulazne veličine u kolonama i vrstama razlikuju samo za jedan bit, bilo koji par susednih horizontalnih ili vertikalnih boksova odgovara minitermu koji **zavisi samo od jedne promenljive!**
- Takavi parovi miniterma se mogu **grupisati zajedno** i *promenljiva koja se razlikuje se odbacuje*.
- Pogledajmo jednostavan primer.

Minimiziranje 3-ulazna funkcija

Truth Table

a	b	c	y
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0



c \ ab	ab			
	00	01	11	10
0				1
1	1	1		1



c \ ab	ab			
	00	01	11	10
0				1
1	1	1		1

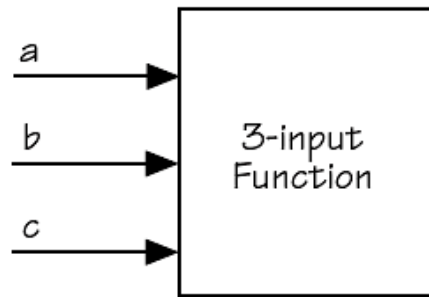
$$y = (\bar{a} \& c) \mid (a \& b)$$

- 1) $a=0$, $c=1$ za oba boksa.
- 2) b uzima obe vrednosti !

Za ovu grupu promena vrednosti promenljive b **nema uticaja** na vrednost izlaza!

Promenljiva b je redundantna i može se izostaviti iz izraza!

Minimizacija 3-ulazne funkcije



a	b	c	y
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Za ovu grupu promenljivih b nema značaja!

ab		c			
		00	01	11	10
0			1	1	1
1				1	

$$y = (b \ \& \ \bar{c}) \mid (a \ \& \ \bar{c}) \mid (a \ \& \ b)$$

Za ovu grupu promena vrednosti promenljive a nema uticaja na vrednost izlaza! Vrednost izraza je ista bez obzira na vrednost a promenljive!

Promenljiva a je **redundantna** i može se **izostaviti** iz izraza.

Za ovu grupu vrednost promenljive c nema značaja!

Minimizacija 4-ulazne funkcije

cd \ ab

	00	01	11	10
00		1		
01		1		
11		1		
10		1		

$$y = (\bar{a} \& b)$$

cd \ ab

	00	01	11	10
00				
01				
11				
10	1	1	1	1

$$y = (c \& \bar{d})$$

cd \ ab

	00	01	11	10
00			1	
01	1	1	1	1
11			1	
10			1	

$$y = (a \& b) \vee (\bar{c} \& d)$$

cd \ ab

	00	01	11	10
00				
01	1	1		
11	1	1		
10				

$$y = (\bar{a} \& d)$$

cd \ ab

	00	01	11	10
00		1	1	
01		1	1	
11		1		
10		1		

$$y = (\bar{a} \& b) \vee (b \& \bar{c})$$

cd \ ab

	00	01	11	10
00				
01		1	1	
11		1	1	1
10			1	1

$$y = (b \& d) \vee (a \& c)$$

Minimizacija 4-ulazne funkcije (2)

ab \ cd	00	01	11	10
00		1		
01				
11				
10		1		

$$y = (\bar{a} \& b \& \bar{d})$$

ab \ cd	00	01	11	10
00				
01	1			1
11				
10				

$$y = (\bar{b} \& \bar{c} \& d)$$

ab \ cd	00	01	11	10
00		1	1	
01				
11				
10		1	1	

$$y = (b \& \bar{d})$$

ab \ cd	00	01	11	10
00	1		1	1
01	1			1
11				
10			1	

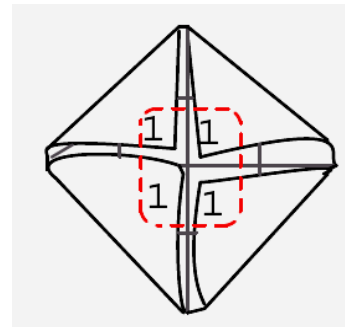
$$y = (\bar{b} \& \bar{c}) \vee (a \& b \& \bar{d})$$

ab \ cd	00	01	11	10
00	1	1		
01				
11	1			1
10	1	1		1

$$y = (\bar{a} \& \bar{d}) \vee (\bar{b} \& c)$$

ab \ cd	00	01	11	10
00	1			1
01				
11				
10	1			1

$$y = (\bar{b} \& \bar{d})$$



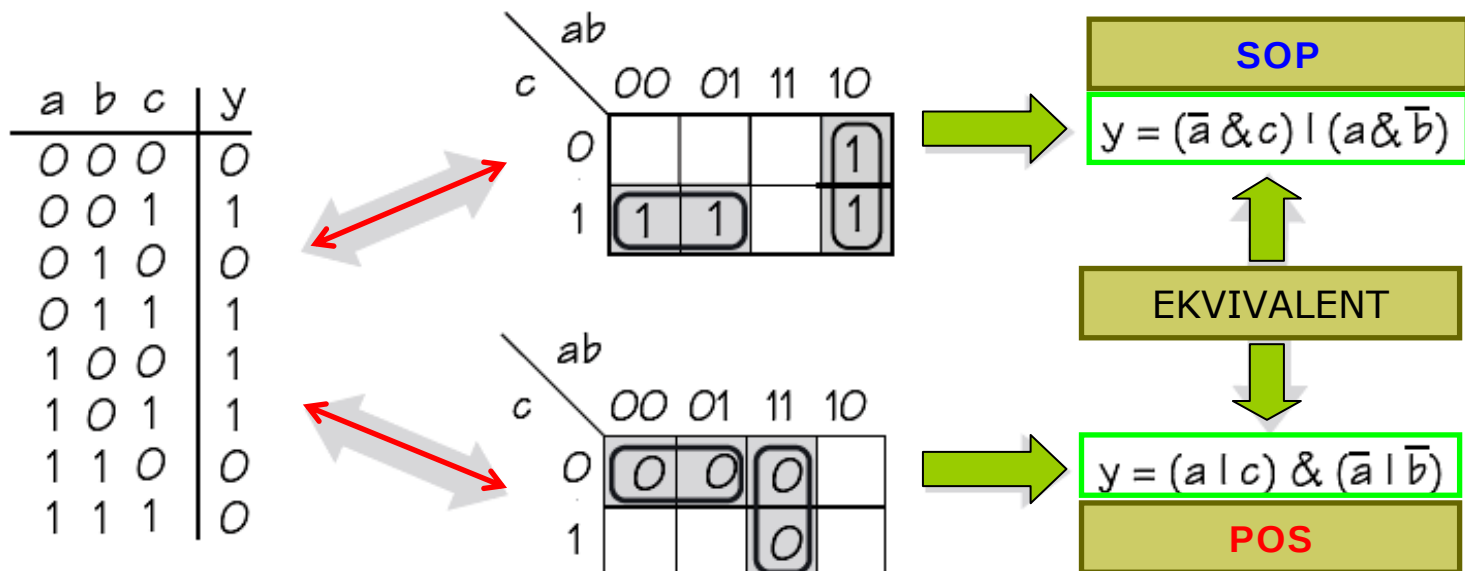
Nekompletno definisane funkcije

$ab \backslash cd$					
		00	01	11	10
00	1	?	1	1	
01					
11		?	?	?	
10	?		1	1	



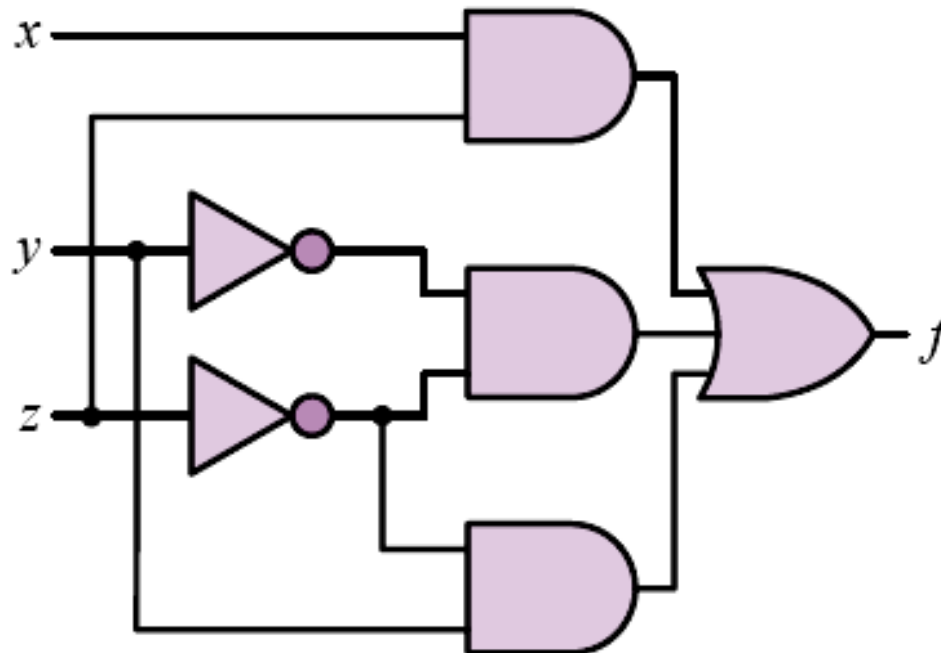
$$y = (\bar{c} \& \bar{d}) \mid (a \& c)$$

Suma proizvoda ili proizvod suma ?



Domaći zadatak (1)

- Karnuovim mapama uprostite logičku funkciju $f(x,y,z)$ predstavljenu logičkim kolima.



Domaći zadatak (2)

- Formirajte Karnuovu mapu za datu funkciju f :

$$f(a, b, c, d) = \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} \cdot d + \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot c \cdot \bar{d} + \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot c \cdot d + \bar{a} \cdot b \cdot \bar{c} \cdot d + a \cdot \bar{b} \cdot c \cdot d + a \cdot b \cdot \bar{c} \cdot \bar{d}$$

- Koristeći nekompletno definisanu funkciju f uprostite gornji izraz.

A 4x4 Karnaugh map for the function $f(a, b, c, d)$. The rows are labeled $a \cdot b$ (00, 01, 11, 10) and the columns are labeled $c \cdot d$ (00, 01, 11, 10). The map contains 1s and 'x' marks. Four groups are highlighted with rounded rectangles and labeled with arrows:

- $b \cdot \bar{d}$ (top row, columns 01 and 11)
- $\bar{b} \cdot c$ (top row, columns 11 and 10)
- $\bar{a} \cdot \bar{c} \cdot d$ (left column, rows 00 and 01)
- $\bar{a} \cdot c \cdot d$ (left column, rows 11 and 10)

$a \cdot b \backslash c \cdot d$	00	01	11	10
00	0	1	1	1
01	x	1	0	x
11	1	0	0	x
10	0	0	1	x

Karnuove mape, N=2, 3, 4.

	$\bar{X}$	X
$\bar{Y}$	$\bar{X}\bar{Y}$	$X\bar{Y}$
Y	$\bar{X}Y$	XY

X	0	1
Y		
0		
1		

$N = 2$

	$\bar{X}\bar{Y}$	$\bar{X}Y$	XY	$X\bar{Y}$
$\bar{Z}$	$\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$	$\bar{X}Y\bar{Z}$	$XY\bar{Z}$	$X\bar{Y}\bar{Z}$
Z	$\bar{X}\bar{Y}Z$	$\bar{X}YZ$	XYZ	$X\bar{Y}Z$

X	00	01	11	10
Z				
0				
1				

$N = 3$

	$\bar{W}\bar{X}$	$\bar{W}X$	WX	$W\bar{X}$
$\bar{Y}\bar{Z}$	$\bar{W}\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$	$\bar{W}X\bar{Y}\bar{Z}$	$WX\bar{Y}\bar{Z}$	$W\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$
$\bar{Y}Z$	$\bar{W}\bar{X}\bar{Y}Z$	$\bar{W}X\bar{Y}Z$	$WX\bar{Y}Z$	$W\bar{X}\bar{Y}Z$
YZ	$\bar{W}\bar{X}YZ$	$\bar{W}XYZ$	$WXYZ$	$W\bar{X}YZ$
$Y\bar{Z}$	$\bar{W}\bar{X}Y\bar{Z}$	$\bar{W}XY\bar{Z}$	$WX Y\bar{Z}$	$W\bar{X}Y\bar{Z}$

W	00	01	11	10
Y				
00				
01				
11				
10				

$N = 4$